

Lieu et barycentre dans l'espace

ABCD est un tétraèdre et O désigne le milieu de [BC].

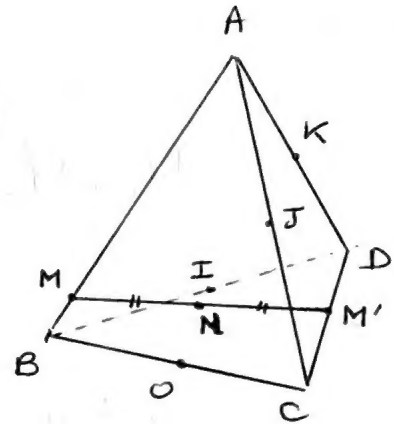
1) Représenter l'intersection du plan  $\mathcal{P} = (O, \vec{AB}, \vec{CD})$  avec les arêtes (AC), (BC), (BD) et (AD) du tétraèdre

2) Soient M et M' 2 pts qqes.

Mq le pt I défini par  $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{BM} + \vec{CM'})$

est le milieu de [MM'].

En déduire que si M et M' appartiennent respectivement aux dtes (AB) et (CD), le milieu I de [MM'] appartient au plan  $\mathcal{P}$ .



3) Quel est le lieu des milieux des segments d'extrémités resp. situées sur (AB) et sur (CD) ?

1)  $\mathcal{P}$  coupe les arêtes en leur milieux. En effet, si J milieu de [AC],  $\vec{OJ} = \frac{1}{2} \vec{OA} \in \vec{\mathcal{P}} \Rightarrow J \in \mathcal{P}$  donc  $J \in \mathcal{P} \cap (AC)$ . (...)

2) \*  $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OM} + \vec{OM'}) = \frac{1}{2}(\vec{BM} + \vec{CM'})$  caractérise bien le milieu de [MM'].

$$\begin{aligned} * \quad \left. \begin{array}{l} M \in (AB) \\ M' \in (CD) \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{BM} \in \vec{\mathcal{P}} \\ \vec{CM'} \in \vec{\mathcal{P}} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{BM} + \vec{CM'}) \in \vec{\mathcal{P}} \\ &\Rightarrow I \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

3) Soit  $\mathcal{L}$  ce lieu géométrique. 2) prouve que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ .

Il reste à montrer la réciproque, ie que  $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ .

Soit  $N \in \mathcal{P}$ . Alors  $N$  est bary. de  $O(\alpha)$ ,  $I(\beta)$ ,  $J(\gamma)$ ,  $K(\delta)$  pour des coeff.  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  convenables et avec  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ .

Gn a :

$$\begin{array}{cccc}
 N = \text{bary. de } & O(\alpha) & I(\beta) & J(\gamma) & K(\delta) \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & \text{bary. } B\left(\frac{\alpha}{2}\right), C\left(\frac{\alpha}{2}\right) & B\left(\frac{\beta}{2}\right), D\left(\frac{\beta}{2}\right) & & A\left(\frac{\delta}{2}\right), D\left(\frac{\delta}{2}\right) \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & A\left(\frac{\gamma}{2}\right), C\left(\frac{\gamma}{2}\right) & 
 \end{array}$$

donc par associativité du barycentre :

$$N = \text{bary. de } A\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right) \quad B\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad C\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \quad D\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)$$

$$= \text{bary de } M\left(\frac{1}{2}\right), M'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases}
 M \text{ bary. de } A\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right), B\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\
 M' \text{ bary. de } C\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right), D\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)
 \end{cases}$$

Finalement  $N = \text{milieu de } [MM']$  où  $M \in (AB)$  et  $M' \in (CD)$

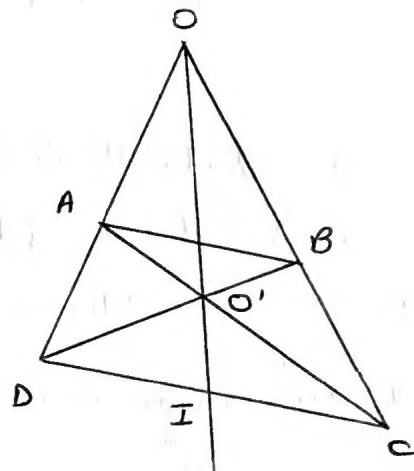
donc  $N \in \mathcal{Z}$ .

Q.F.D

# Associativité du Barycentre

## Trapeze complet :

Dans la fig. ci-contre, ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD). Il s'agit de mg la dte (OO') passe par les milieux de [AB] et [CD]



1) Justifier l'existence d'un réel  $x$  tq

A soit le bary. de  $(O, 1), (D, x)$

2) Exprimer B comme bary. de O et C.

En déduire que O' est bary de  $O(1), C(x), D(x)$

3) En déduire que (OO') passe par le milieu de [C,D].

4) Montrer que (OO') passe par le milieu de [AB].

5) Donner une autre dem. de ce résultat utilisant les homothéties.

1) Trivial

2) Thalès  $\Rightarrow$  B bary  $O(1), C(x)$ .

On utilise la prop. d'associativité des barycentres :

Soit O' le bary. de  $O(1), C(x), D(x)$ , alors O' est le bary de  $B(1+x), D(x)$

$B(1+x)$

donc  $O' \in (BD)$

O' bary de  $O(1), D(x), C(x) \Rightarrow$  O' bary de  $A(1+x), C(x)$

$A(1+x)$

$\Rightarrow O' \in (AC)$

Finalement  $O' \in (BD) \cap (AC)$ .

3) \* Soit I le milieu de [CD]. Par associativité des bary :

O' bary de  $O(1) \underbrace{C(x) D(x)}_{I(2x)} \Rightarrow$  O' bary de  $O(1), I(2x)$

$I(2x)$

$\Rightarrow O' \in (OI)$ .

Donc (OI) passe par le milieu de [CD].

4) \* Sur la ligne le milieu de  $[AB]$  est sur  $(OO')$ , on recommence 2) et 3) avec  $D$  bary. de  $O(1), A(n)$  et  $C$  bary. de  $O(1), B(n)$

5) L'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}$  transforme le segment  $[AB]$  en  $[DC]$ , donc le milieu  $J$  de  $[AB]$  en le milieu  $I$  de  $[CD]$ . Donc  $O, J, I$  alignés.

On recommence avec l'homothétie de centre  $O'$  et de rapport  $\frac{\overline{O'D}}{\overline{O'B}}$ .